Expresión de las distribuciones granulométricas.

Nota: El texto de esta ficha corresponde a un extracto del libro **GALINDO, R.** ***"Prensas, moldes y prensado en la fabricación de baldosas cerámicas".*** **2ª Edición. Pgs 45 a 55. Ed. Macer. Castellón, 2018**.

Formas de expresión de las distribuciones granulométricas

Las distribuciones granulométricas representan los porcentajes en que están presentes las diferentes fracciones o tamaños que conforman un polvo. Pueden expresarse de forma tabulada, como un listado de datos "diámetros – porcentajes" o de forma gráfica, expresando los porcentajes en ordenadas y los diámetros en abscisas. La representación gráfica muestra, por tanto, en un sistema de coordenadas, los tamaños clasificados en intervalos de clase, frente a la frecuencia u ocurrencia de dichos tamaños en una muestra dada. La frecuencia se expresa generalmente como porcentaje de una fracción dada con respecto al total de las fracciones consideradas.

Una distribución granulométrica puede expresarse de forma **diferencial** o de forma **acumulada**. La forma diferencial expresa el porcentaje de partículas en número, en masa, en superficie o en volumen, presente en cada intervalo. La forma acumulada expresa el porcentaje total de partículas de tamaño inferior o superior a un diámetro equivalente determinado. En este primer caso se habla de una distribución **acumulada de cernidos** y en el segundo de una distribución **acumulada de residuos**.

Las distribuciones se representan frecuentemente en masa o en volumen. Ambas son equivalentes si se asume que todas las partículas del material analizado tienen la misma densidad. Pueden emplearse también distribuciones en superficie y en número de partículas. En la figura 1 se muestran ejemplos de todas estas formas de expresar una distribución granulométrica para una pasta de monoporosa roja.

Puede observarse que las distribuciones en número, superficie y volumen son muy distintas entre sí y pueden conducir a diferentes visiones de la distribución de tamaños de un mismo material

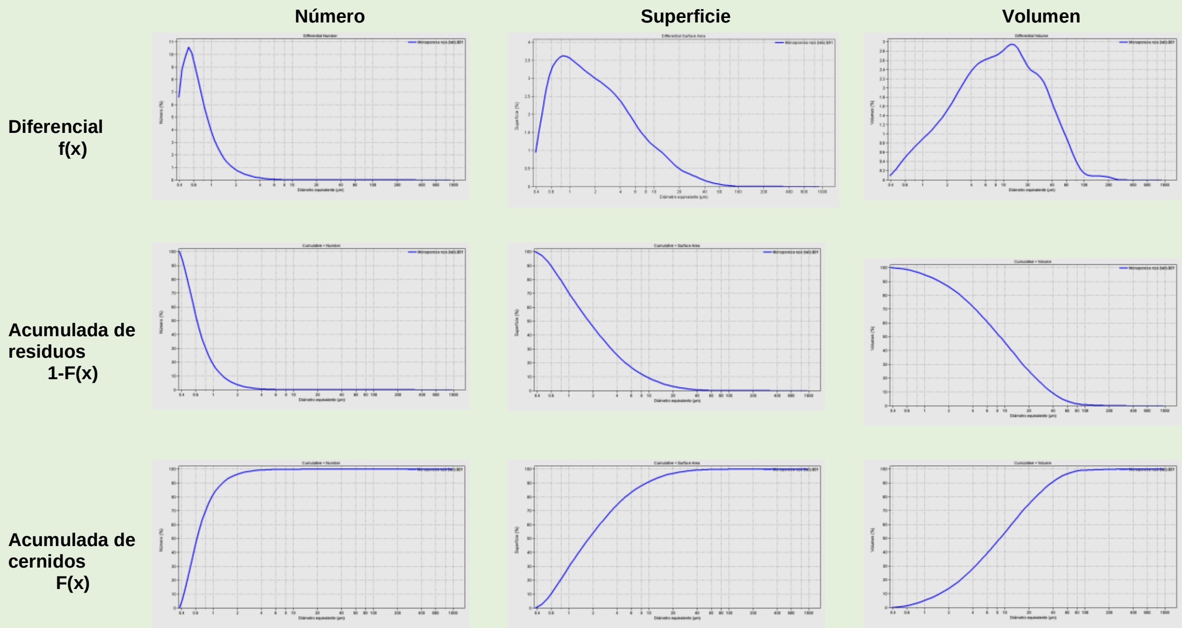

Figura 1. Representaciones gráficas de una distribución granulométrica de una pasta de monoporosa roja.
Fuente: Rafael Galindo

La distribución granulométrica como distribución de probabilidad.

Una distribución de tamaños es una distribución de probabilidad. Supongamos que disponemos de una serie estadística de datos. Esta serie puede estar compuesta, por ejemplo, por los tamaños de gránulo de una determinada muestra. Podemos agrupar estos datos en intervalos, determinar su frecuencia y construir una tabla de frecuencias relativas – intervalos y luego representarla gráficamente mediante un histograma. Esto es exactamente lo que hacemos, por ejemplo, con los datos de un análisis granulométrico mediante tamizado, en el que, los límites de cada intervalo son definidos por dos tamices consecutivos. Para el tratamiento matemático de cada intervalo puede definirse, aunque no es habitual, su “marca de clase” que será el valor central de dicho intervalo. A este valor le asignaremos la frecuencia relativa de este intervalo, lo que equivale a suponer, a efectos de interpretación y de cálculos, que todos los gránulos comprendidos entre dos tamices consecutivos tienen el mismo diámetro equivalente y éste coincide con la marca de clase de dicho intervalo, ya que la técnica de tamizado no nos da ninguna información sobre la distribución de tamaños del residuo de cada tamiz y sólo conocemos sus límites superior e inferior. Se obtiene de esta forma una relación “variable – frecuencia”:

$x_1 \rightarrow f_r(x_1)$
$x_2 \rightarrow f_r(x_2)$
$x_3 \rightarrow f_r(x_3)$
…………..
$x_n \rightarrow f_r(x_n)$

como la expresada, por ejemplo, en la tabla 1 entre los valores “marca de clase” (**x_i**) y porcentaje (**$fr(x_i)$**). Es la distribución granulométrica de nuestra muestra.

Recuérdese que la probabilidad matemática (P) de que ocurra un suceso determinado **A** se define como la relación entre el número de casos en los que el suceso ocurre (se denominan casos favorables **n_A**) y el número total de casos posibles en una determinada experimentación (**n_T**).

$$P = \frac{n_A}{n_T} \qquad \text{[Ecuación 1]}$$

La frecuencia relativa se ha calculado como el peso de la muestra con tamaños comprendidos en el intervalo de referencia (casos “favorables”) dividido por el peso total de la muestra (casos “posibles”). Este valor se aproxima a la probabilidad matemática a medida que el número de observaciones n aumenta, de manera que:

$$\lim_{n\to\infty} f_r = P \qquad \text{[Ecuación 2]}$$

Naturalmente, si **n** aumenta, lo hace el número de intervalos, por lo que su longitud disminuye, y por tanto el histograma va tomando una forma que tiende a una curva continua **f(x)**. Esto ocurre, en cierta medida, cuando hacemos un análisis granulométrico mediante difracción láser o con cualquier otra técnica instrumental. En un tamizado tenemos habitualmente entre 6 y 8 tamices, pero, un análisis mediante difracción láser nos puede dar información sobre unos 150 canales, es decir 150 intervalos de nuestro histograma.

Representación diferencial, f(x).

La representación diferencial de una distribución granulométrica (figura 2) es, por tanto, una función **f(x)**, denominada **función de densidad de probabilidad**, en la que **x** es el diámetro equivalente. Si **x** es una variable continua, y el diámetro equivalente lo es, la función de densidad es una función continua **f(x)**, que representa la probabilidad por unidad de longitud (es decir, la densidad de probabilidad) de encontrar una partícula de diámetro **x**; de forma que la probabilidad correspondiente a un intervalo diferencial **dx** será **f(x).dx.**

La probabilidad de encontrar una partícula con un tamaño comprendido entre **x_a** y **x_b** es, por tanto:

$$P(x_a \le x \le x_b) = \int_{x_a}^{x_b} f(x)\cdot dx \qquad \text{[Ecuación 3]}$$

Naturalmente, la probabilidad de encontrar un valor entre - ∞ y +∞ es 1

$$P(-\infty < x < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot dx = 1 \qquad \text{[Ecuación 4]}$$

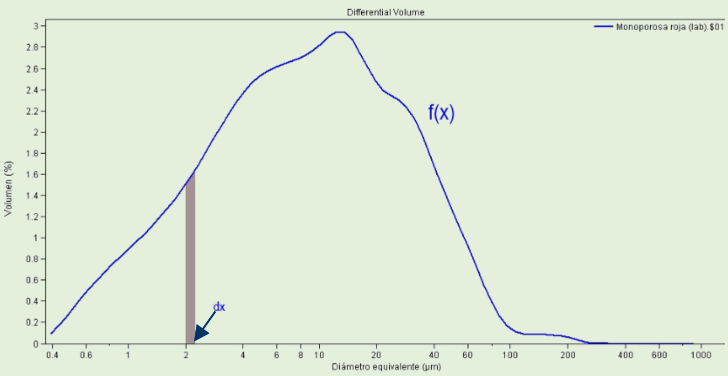

Figura 2. Representación gráfica de una distribución diferencial (función de densidad de probabilidad) de una pasta de monoporosa roja.
Fuente: Rafael Galindo.

Representaciones acumuladas, F(x) y 1-F(x).

La probabilidad de encontrar una partícula con un tamaño inferior o igual a un valor determinado **x** se puede representar mediante la función **F(x)**, tal que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \cdot dx \qquad \text{[Ecuación 5]}$$

F(x) representa la distribución acumulada de cernidos (figura 3). Análogamente, la probabilidad de encontrar una partícula con un tamaño superior o igual a un determinado valor x será:

$$F^{*}(x) = \int_{x}^{+\infty} f(x) \cdot dx \qquad \text{[Ecuación 6]}$$

F*(x) representa la distribución acumulada de residuos

$$F^{*}(x) + F(x) = 1 \quad \rightarrow \quad F^{*}(x) = 1 - F(x) \qquad \text{[Ecuación 7]}$$

La representación acumulada de una distribución granulométrica es, por tanto una función **F(x)** denominada **función de distribución de probabilidad.**

Lógicamente, la función de densidad de probabilidad es la derivada de la función de distribución, es decir, la representación diferencial de una granulometría es la derivada de la representación acumulada de cernidos.

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \qquad \text{[Ecuación 8]}$$

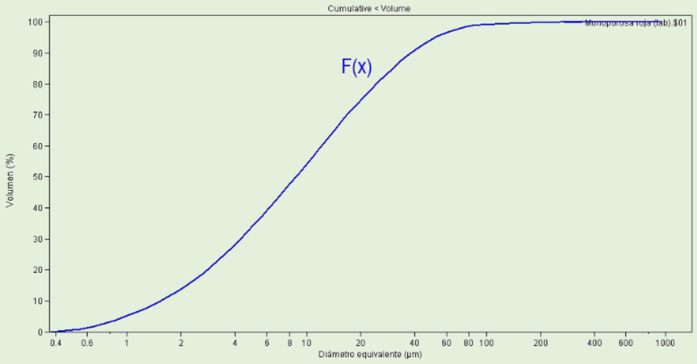

Figura 3. Representación gráfica de una distribución acumulada de cernidos (función de distribución de probabilidad) de una pasta de monoporosa roja.
Fuente: Rafael Galindo.

Expresión de las distribuciones: número de partículas, superficie, volumen y masa.

Las distribuciones granulométricas pueden expresarse respecto al número de partículas; a su masa; a su volumen o a su superficie. Para evitar confusiones pueden expresarse, aunque no es habitual, mediante un subíndice, así $F_N(x)$, $F_M(x)$, $F_V(x)$, $F_S(x)$ serían las distribuciones acumuladas de cernidos expresadas respectivamente en número, masa, volumen y superficie y $f_N(x)$, $f_M(x)$, $f_V(x)$, $f_S(x)$ las correspondientes distribuciones diferenciales. Por tanto $F_N(45)$ = 82 % significa que el 82 % del número total de partículas tiene un tamaño inferior a 45 μm, si esta es la unidad de medida de longitud elegida; y en cambio, $F_M(45)$= 82 % significa que las partículas con un tamaño inferior a 45 μm tienen una masa que supone el 82 % del total de la masa de la muestra.

Según la técnica de medida de la distribución de tamaños empleada resultará más natural, o sencillo, expresar los resultados de una u otra forma. Así, por ejemplo, la forma habitual de expresión de una distribución granulométrica obtenida mediante tamizado es en masas, ya que para determinarla se pesa el residuo retenido en cada tamiz y se calculan los correspondientes porcentajes.

También se representan en masas, los resultados de los análisis granulométricos realizados mediante sedimentación con pipeta de Andreasen, ya que, de acuerdo con la ley de Stokes, la velocidad de sedimentación de una partícula que suponemos esférica y en un medio ilimitado, es proporcional al cuadrado de su radio. El valor de la constante de proporcionalidad o constante de Stokes, depende de la densidad y de la viscosidad del líquido en cuyo seno sedimenta la partícula y de la densidad de ésta. Así pues, se observa que en las diferentes técnicas de análisis granulométrico basadas en la sedimentación, la distribución se expresa con facilidad en masa o en volumen. Ambas distribuciones son equivalentes si se estudia una distribución de un sólo material, y por tanto se asume que todas las partículas tienen la misma densidad, independientemente de su tamaño.

En cambio, las medidas de distribución granulométrica obtenidas mediante difracción láser, se suelen expresar de manera habitual en volumen ya que el ángulo de difracción del haz monocromático que incide en las partículas depende del volumen de las partículas y de su índice de refracción, aunque, por supuesto, caben otras expresiones.

Es posible cambiar la forma de expresión de una distribución granulométrica si las partículas cumplen una serie de condiciones: para realizar los cálculos de conversión entre las diferentes formas de expresión debe asumirse que todas las partículas son esféricas y del mismo material y por tanto que la densidad de todas ellas es la misma. Estas condiciones no siempre se cumplen en los sistemas de partículas analizados en la industria cerámica, por lo que tenemos que ser prudentes a la hora de realizar las conversiones.

Para estudiar las relaciones entre las diferentes formas de expresar distribuciones de tamaños, vamos a partir de una distribución en masa obtenida mediante tamizado por vía seca de una arena cuarcífera. Para ello, suponemos que todas las partículas pueden considerarse esféricas y tienen todas el mismo peso específico (ρ_s=2,65 g/cc).

En la tabla 1 se muestran los resultados de un ensayo en el que la distribución se expresa en peso. En la figura 4 se tienen las representaciones gráficas diferencial, y acumuladas de residuos y de cernidos de los resultados de este ensayo.

Tabla 1. Distribución granulométrica de una arena cuarcífera. Fuente: Rafael Galindo.

Luz de malla. (µm)	Marca de clase. (µm)	W_{Ti} (g)	Diferencial. (%)	Residuo acumulado.	Acumulado de residuos. (%)	Cernido acumulado.	Acumulado de cernidos. (%)
1000	--	0,00	0,00	d ≥ 1000	0	d < 1000	100.0
500	750,0	1,25	1,50	d ≥ 500	1,50	d < 500	98.51
300	400,0	6,28	7,54	d ≥ 300	9.04	d < 300	90.97
200	250,0	12,35	14,83	d ≥ 200	23.87	d < 200	76.14
125	162,5	15,45	18,55	d ≥ 125	42.42	d < 125	57.59
90	107,5	15,00	18,01	d ≥ 90	60.43	d < 90	39.58
75	82,5	12,50	15,01	d ≥ 75	75.44	d < 75	24.57
63	69,0	10,10	12,12	d ≥ 63	87.56	d < 63	12.45
45	54,0	7,12	8,55	d ≥ 45	96.11	d < 45	3.90
0	22,5	3,25	3,90	d > 0	100		
		83.30	**100,00**				

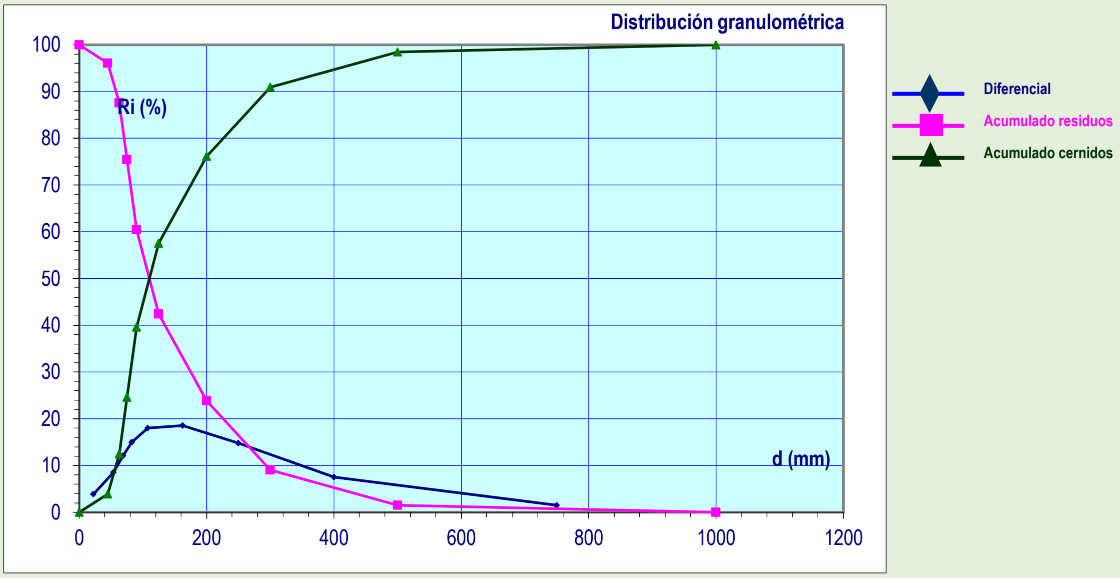

Figura 4. Representación diferencial y acumulada de residuos y cernidos, en peso, de la distribución granulométrica de una arena cuarcífera.
Fuente: Rafael Galindo.

Expresión de la distribución en número de partículas.

En cada ***i*** intervalo de la distribución granulométrica expresada en la tabla 1 se tienen n_i partículas cuyo diámetro es la marca de clase de este intervalo, es decir X_i^*. El peso de todas las partículas de cada intervalo es w_{Ti} y es conocido, por lo que es posible calcular el número de partículas de cada intervalo, es decir, las que han sido retenidas en cada tamiz, mediante la siguiente expresión:

$$n_i = \frac{w_{Ti}}{\rho \cdot V_i} \qquad \text{[Ecuación 9]}$$

En la que V_i es el volumen de una sola partícula esférica de diámetro X_i^*. Es decir:

$$V_i = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{x_i^*}{2}\right)^3 \qquad \text{[Ecuación 10]}$$

Y por lo tanto:

$$n_i = \frac{6 w_{Ti}}{\pi \cdot \rho \cdot \left(x_i^*\right)^3} \qquad \text{[Ecuación11]}$$

En la tabla 2 y la figura 5 se muestran los resultados del cálculo del número de partículas por tamiz y el porcentaje correspondiente.

Tabla 2. Distribución diferencial en número de partículas de una arena cuarcífera.
Fuente: Rafael Galindo.

Marca de clase. (µm)	w_{Ti} (g)	N_i	N_i (%)
--	0,00	0	0
750,0	1,25	2.135	0,001
400,0	6,28	70.719	0,02
250,0	12,35	569.643	0,20
162,5	15,45	2.594.920	0,90
107,5	15,00	8.702.046	3,02
82,5	12,50	16.043.668	5,56
69,0	10,10	22.157.951	7,68
54,0	7,12	32.587.738	11,30
22,5	3,25	205.632.289	71,31
Total	**83.30**	**288.361.109**	**100**

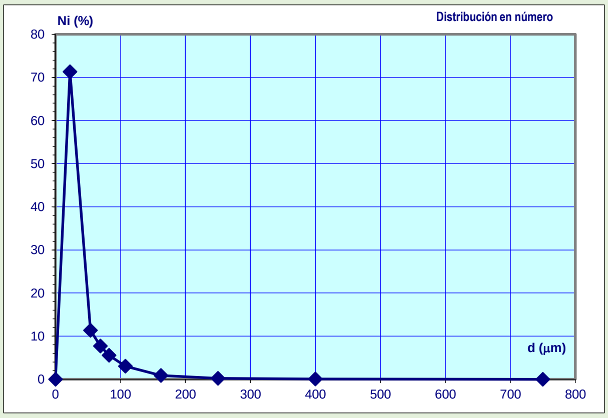

Figura 5. Representación diferencial, en número de partículas, de la distribución granulométrica de una arena cuarcífera.
Fuente: Rafael Galindo.

Expresión de la distribución en superficie.

La superficie de una partícula (**Si**) que pertenece al intervalo **i** de marca de clase x_i^* es:

$$S_i = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{x_i^*}{2}\right)^2 \qquad \text{[Ecuación12]}$$

Por tanto la superficie de todas las partículas de un intervalo (**S_{Ti}**) resultará del producto entre la superficie de una partícula (**Si**), y el número de partículas pertenecientes a dicho intervalo (**n_i**), que puede calcularse mediante la ecuación 9:

$$S_{Ti} = n_i \cdot S_i = \frac{6 \cdot \mathrm{w}_{Ti}}{\rho \cdot x_i^*} \qquad \text{[Ecuación13]}$$

En la tabla 3 y la figura 6 se muestran los resultados del cálculo de la superficie de las partículas de cada tamiz y el porcentaje correspondiente.

Tabla 3. Distribución diferencial en superficie de una arena cuarcífera.
Fuente: Rafael Galindo.

Marca de clase. (µm)	w_{Ti} (g)	S_{Ti} (cm^2)	S_{Ti} (%)
--	0,00	0	0
750,0	1,25	37,7	0,19
400,0	6,28	355,5	1,79
250,0	12,35	1.118,5	5,64
162,5	15,45	2.152,7	10,86
107,5	15,00	3.159,3	15,94
82,5	12,50	3.430,5	17,30
69,0	10,10	3.314,2	16,72
54,0	7,12	2.985,3	15,06
22,5	3,25	3.270,4	16,50
Total	**83.30**	**19.824,2**	**100**

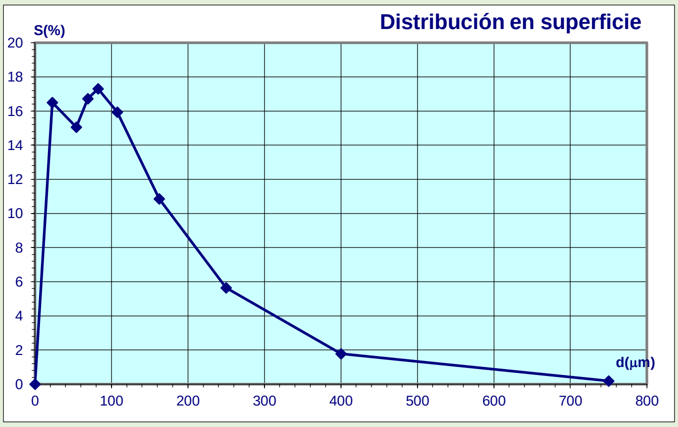

Figura 5. Representación diferencial, en superficie, de la distribución granulométrica de una arena cuarcífera.
Fuente: Rafael Galindo.

Expresión de la distribución en volumen.

El volumen ocupado por las $\mathbf{n_i}$ partículas de cada intervalo ($\mathbf{V_{Ti}}$) es igual a:

$$V_{Ti} = \frac{w_{Ti}}{\rho} \qquad \text{[Ecuación14]}$$

donde ρ es el peso específico (g/cc) de las partículas que componen la muestra. Por tanto, si se acepta que espeso específico es el mismo en todas las partículas de la muestra, la distribución en volumen es exactamente igual a la distribución en masa.