

Interpretación de las distribuciones granulométricas.

Nota: El texto de esta ficha corresponde a un extracto del libro GALINDO, R. "Prensas, moldes y prensado en la fabricación de baldosas cerámicas". 2ª Edición. Pgs 51 a 55. Ed. Macer. Castellón, 2018.

Formas de expresión de las distribuciones granulométricas

Una muestra correctamente dispersada de una materia prima o de una pasta en polvo, está formada por un conjunto de partículas y agregados con una distribución continua de tamaños. Hasta ahora, hemos agrupado este conjunto en intervalos (frecuentemente será la propia técnica de medida quien lo hará) y hemos calculado su frecuencia en volumen, en número o en superficie. El siguiente paso va a ser determinar un conjunto de estadísticos que caractericen esta distribución.

Podemos clasificarlos en tres grandes grupos:

- Medidas de tendencia central.
- Medidas de dispersión.
- Medidas de la forma de la distribución.

Frecuentemente se utiliza la expresión "promedio" como "valor representativo de un conjunto de datos". Como los promedios tienden a situarse en el centro de un conjunto de datos ordenados según su magnitud, se conocen también como "medidas de tendencia central" o de "centralización". El estudio de la tendencia central es la primera etapa del análisis estadístico descriptivo propiamente dicho.

Pueden considerarse dos tipos de medidas de tendencia central, las **medias** y los **valores de posición**, esto es, la moda y la mediana.

Los estadísticos habitualmente empleados en la interpretación de los análisis granulométricos se resumen en la tabla 1.

Tabla 1. Estadísticos empleados en la descripción de las distribuciones granulométricas.

Tipo de medida	Estadístico		
Medidas de tendencia central	Medias	Media aritmética	Media de longitud.
			Media de superficie.
			Media de volumen.
		Medias D(p,q) para $p \neq q$	
		Media geométrica	Medias D(p,q) para $p = q$
Medidas de dispersión	Mediana.		
	Moda.		
	Varianza.		
Medidas de dispersión	Desviación típica.		
	Índice de variabilidad.		

Funciones de distribución de tamaños.

Hasta ahora, hemos visto cómo podemos [representar una distribución de tamaños](#) atendiendo al número de partículas, a su superficie, a su masa o a su volumen. Esta distribución se puede representar de forma diferencial o de forma acumulada. Hemos visto también que la forma diferencial se puede interpretar matemáticamente como una función de densidad de probabilidad, y así $f(x)$ sería la probabilidad por unidad de longitud de encontrar una partícula de tamaño x . La probabilidad de encontrar una partícula de tamaño inferior o igual a x sería $F(x)$, es decir, la función distribución, o lo que es lo mismo, la función acumulada de cernidos. La función acumulada de residuos sería por tanto $1-F(x)$. Se han descrito también una serie de estadísticos conocidos para la caracterización de una distribución granulométrica

Toda esta información es, sin duda, suficiente para caracterizar la distribución de tamaños de una muestra y para poder relacionarla con su comportamiento en la operación de prensado y en las sucesivas etapas del proceso de fabricación y también con las características del producto acabado. Sería, sin embargo, interesante y práctico, conocer la expresión matemática $f(x)$, o al menos una buena aproximación a ella, en función de unos pocos parámetros conocidos, aunque hemos de tener en cuenta que esto no va a ser siempre posible.

Distribución normal.

Las distribuciones de probabilidad se pueden caracterizar con parámetros de tendencia central y de dispersión. La distribución normal $N(\mu, \sigma)$ queda caracterizada con la media (μ) y la desviación típica (σ) según la ecuación:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{[Ecuación 1]}$$

La función $f(x)$ es la función de densidad de la distribución normal. Esta distribución es simétrica, con forma de campana centrada en la media, que es el máximo de la función, y coincide con la moda y con la mediana. Los puntos de inflexión de la curva se localizan en $\mu \pm \sigma$.

La media (μ) de la distribución normal, proporciona, por tanto, la medida de la posición central:

$$\mu = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx} \quad \text{[Ecuación 2]}$$

y la desviación típica, da una medida de la dispersión de los valores alrededor de la media

$$\sigma = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx}} \quad \text{[Ecuación 3]}$$

Un problema importante que plantea el uso de la distribución normal como ecuación para describir algunas distribuciones de tamaños de partícula es que predice pequeñas fracciones de tamaños inferiores a cero, y los tamaños mayores teóricamente no tienen límite.

Distribución log-normal.

Esta distribución se da con relativa frecuencia en polvos calcinados de minerales, o procedentes de molienda ⁽¹⁾ ⁽²⁾, como por ejemplo en el corindón y en la arena de circonio. Su expresión es:

$$f(\ln x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}) \ln \sigma_g} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln x - \ln \mu_g)^2}{2(\ln \sigma_g)^2}\right) \quad \text{[Ecuación 4]}$$

El parámetro μ_g representa la media geométrica y σ_g la desviación estándar geométrica. Esta distribución es también simétrica si se representa en una escala logarítmica de abscisas.

Distribución de Rosin, Rammler, Sperling y Bennett (RRSB).

Estos investigadores propusieron, a partir del estudio de numerosas curvas de distribución granulométrica, la siguiente expresión matemática para su descripción:

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\mu}\right)^n} \quad \text{[Ecuación 5]}$$

donde:

F(x)	Función de distribución acumulada de cernidos
x	Diámetro equivalente de las partículas (μm)
μ	Diámetro estadístico medio (μm)
n	Índice de uniformidad de la distribución.

La ecuación 5 puede expresarse también como:

$$R = 100 \cdot e^{-\left(\frac{x}{\mu}\right)^n} \quad \text{[Ecuación 6]}$$

donde **R** es la distribución acumulada de residuos, expresada en %. Para ajustarla a los datos experimentales de una distribución granulométrica dada, esta ecuación puede linealizarse tomando dos veces logaritmos, con lo que resulta:

$$\log\left(\ln \frac{100}{R}\right) = n \cdot \log x - n \cdot \log \mu \quad \text{[Ecuación 7]}$$

Por tanto, si se llevan a ordenadas los valores de $\ln(100/R)$ y a abscisas los de x , en una escala doble logarítmica, se obtendrá una recta si la muestra puede expresarse de acuerdo con la ecuación 6.

Los datos de $\lg(\ln 100/R)$ y de $\lg x$ pueden ajustarse por mínimos cuadrados, y si el ajuste es bueno, (información que nos dará el coeficiente de correlación r^2), podremos calcular la pendiente y la ordenada en el origen de la recta definida por la ecuación 7. La pendiente da el valor del índice de uniformidad de la distribución (**n**) y nos informará

sobre la dispersión de los diámetros, de forma que cuanto mayor sea, más uniforme será la distribución del tamaño de las partículas. La ordenada en el origen es $-n \cdot \lg \mu$ y por tanto, conocido n , es posible calcular el diámetro estadístico medio (μ).

Por tanto, la ecuación 5 puede caracterizar una función de distribución de la probabilidad, como es la curva acumulada de residuos, con sólo dos parámetros estadísticos, uno de medida de la tendencia central (μ) y otro de medida de la dispersión (n).

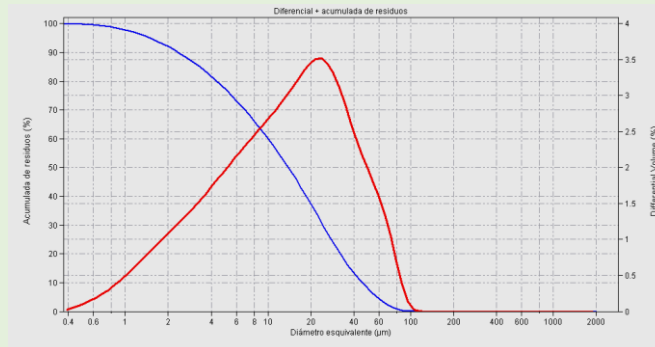
Por otra parte, si una distribución granulométrica dada puede expresarse mediante el modelo RRSB, el diámetro estadístico medio de esta distribución es el diámetro al cual $R=36,8\%$ ya que si $x = \mu$, la ecuación 5 se transforma en:

$$R = 100 \cdot e^{-1} = 36,8\% \quad [\text{Ecuación 8}]$$

A continuación se muestran ejemplos de distribuciones granulométricas de diferentes pastas industriales empleadas en la fabricación de baldosas cerámicas. Para ajustarlas al modelo RRSB, se eligieron los datos del residuo a 5; 10; 15; 20; 30; 40; 45; 50; 55; 60; 65; 70; 80; 85; 90 y 95 % obtenidos mediante difracción láser en un equipo COULTER LS 100 Q con muestras preparadas en vía húmeda y dispersadas.

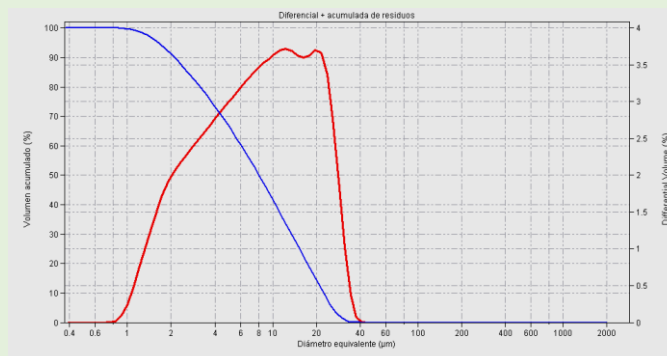
Gres de pasta roja.

n	1,012
μ (μm)	17,5
r^2	0,98645



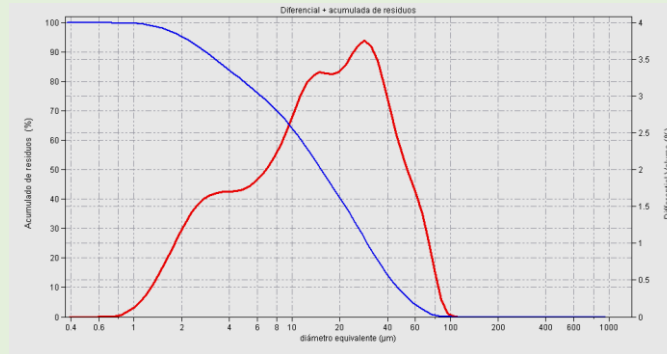
Gres porcelánico.

n	1,355
μ (μm)	11,3
r^2	0,98257



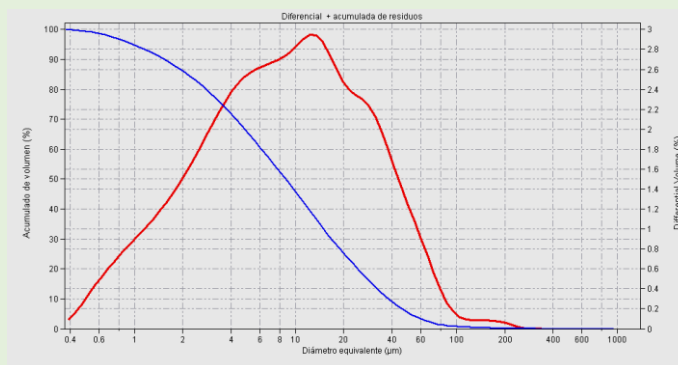
Gres de pasta blanca.

n	1,161
μ (μm)	21,8
r^2	0,99312



Monoporosa de pasta roja.

n	0,990
μ (μm)	14,3
r^2	0,98350

**Distribución de Gaudin - Schuhmann.**

Esta distribución puede ajustarse a algunos polvos de granulometría relativamente gruesa, de minerales molturados industrialmente.

$$F(x) = \left(\frac{x}{x_{\max}} \right)^n \quad \text{[Ecuación 8]}$$

En esta ecuación **F(x)** es de nuevo la función de distribución de **x** (distribución acumulada de cernidos, en tanto por uno), **x_{max}** representa el tamaño máximo teórico de la distribución y **n** es un parámetro que informa sobre la dispersión de tamaños de la distribución.

Para ajustar la ecuación a los datos experimentales, puede expresarse como:

$$C = \left(\frac{x}{x_{\max}} \right)^n \cdot 100 \quad \text{[Ecuación 9]}$$

y por tanto:

$$\lg\left(\frac{C}{100}\right) = n \cdot \lg x - n \cdot \lg x_{\max} \quad \text{[Ecuación 10]}$$

siendo **C** la distribución acumulada de cernidos, en %.

Si el ajuste por mínimos cuadrados de los datos de $\lg(C/100)$ y de $\lg x$ es bueno, la pendiente de la recta nos dará el valor del coeficiente n y el valor de la ordenada en el origen nos permitirá calcular x_{\max}

Combinación de distribuciones granulométricas.

Es posible que dispongamos de varios análisis granulométricos de un mismo material que abarquen diferentes rangos de tamaños y deseemos combinarlos para obtener una única distribución de rango más amplio. Para realizar la combinación de los resultados, debemos asegurarnos en primer lugar de que el concepto de diámetro equivalente empleado sea el mismo en todas las distribuciones granulométricas disponibles, o bien realizar los oportunos cálculos de conversión si ello es posible. Si la técnica empleada para el análisis es la misma y el procedimiento de preparación de la muestra también lo es, pueden combinarse los resultados si existe una zona de solapamiento entre ambos resultados lo suficientemente amplia que permita la comparación. El procedimiento habitual consiste entonces en solapar ambos histogramas y comprobar si al menos los resultados para una marca de clase de la región común a ambos análisis coinciden. Deben entonces igualarse las escalas empleadas para representar los tamaños y los porcentajes en ambos análisis, y recalcular los porcentajes adaptándolos a la totalidad de los datos disponibles tras la combinación ⁽³⁾.

Si no existe una zona de solapamiento entre ambos análisis, o ésta es muy estrecha, no es posible su combinación. Así, por ejemplo, no es posible combinar un análisis de 300 a 100 μm con otro de 100 a 38 μm , aunque hayan sido realizados con la misma técnica, ya que no existe una zona de solapamiento entre ambas distribuciones.

Bibliografía

- (1) RAHAMAN, M.N. *"Ceramic processing and sintering"* 2ª Ed. Marcel Dekker, Inc. Nueva York. (2003).
- (2) REED, J.S. *"Principles of ceramics processing"*. (2 Edición). John Wiley & Sons, Inc. (1938). Rev. 1988.
- (3) DINGER, D.R. *"Characterization techniques for ceramists"*. Ed. Morris Publishing. (2005).