Tratamiento estadístico de los resultados experimentales de la resistencia mecánica.

La distribución de probabilidad de Weibull.

Los resultados obtenidos en los **ensayos de resistencia mecánica** presentan siempre una cierta dispersión, por lo que, para su interpretación, es necesario realizar el tratamiento estadístico de los mismos. Esta dispersión no es igual en todo tipo de productos ni en todos los procedimientos.

La dispersión de los resultados depende sobre todo de la presencia de microfisuras, discontinuidades y defectos puntuales en las piezas ensayadas, y por tanto podría verse afectada por la variabilidad de la dureza de los gránulos del polvo de prensado, en tanto que su deformabilidad influye en la pervivencia de poros intergranulares, que son de mayor tamaño, y en la microestructura de la pieza compactada. Por otra parte, se sabe que la dispersión de los resultados de resistencia mecánica es aún mayor en materiales cerámicos enfibrados (1).

La dispersión de los valores de resistencia mecánica es también diferente según el procedimiento de medida empleado. Así, la dispersión de los resultados con el método de flexión en tres puntos es inferior a la que se obtiene mediante la flexión en cuatro puntos, por lo que, en general, se prefiere el primero (2).

Para la medida de la dispersión de los valores medidos, pueden emplearse parámetros estadísticos como la varianza, la desviación típica o el índice de variabilidad, calculados sobre series estadísticas de muestras medidas. También es posible ajustar los valores a alguna distribución de probabilidad y caracterizarla mediante sus parámetros; preferentemente una medida de tendencia central y una de dispersión. Una función de probabilidad que se ajusta bastante bien a la distribución de valores de resistencia mecánica es la distribución de probabilidad de Weibull (3).

Esta función describe la distribución de fallos de un dispositivo o de un sistema y se emplea fundamentalmente en ingeniera de la fiabilidad, campo en el que tiene importantes aplicaciones, como también las tiene en el campo de la mecánica, ya que permite evaluar el tiempo de vida útil de equipos y componentes (4).

La tasa de fallos en el tiempo **λ(t)** de un componente o de un sistema se describe en función de la fiabilidad **R(t)** según:

$$\lambda(t) = \frac{\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)} \qquad \text{(ec.1)}$$

y por tanto, la fiabilidad puede expresarse como:

$$R(t) = \exp\left(-\int \lambda(t)dt\right) \qquad \text{(ec.2)}$$

En 1951, Weibull (3) propuso una expresión empírica para la distribución de fallos:

$$\int \lambda(t)dt = \left(\frac{t-t_0}{\mu}\right)^m \qquad \text{(ec.3)}$$

en la que:

- **t_0**: tiempo inicial o vida mínima y define el tiempo de partida u origen de la distribución.
- **μ**: Medida de tendencia central de la distribución (vida característica).
- **m**: Medida de dispersión de la distribución (módulo de Weibull).

Así pues, la fiabilidad definida por Weibull queda establecida como:

$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right)^m\right] \qquad \text{(ec.4)}$$

F(t) se define como “infiabilidad” o función acumulativa de fallos:

$$F(t) = 1 - R(t)$$

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right)^m\right] \qquad \text{(ec.5)}$$

Esta ecuación es la forma habitual de expresar la distribución de Weibull, y es, por tanto, la función de distribución de fallos.

Obsérvese que cuando $t-t_0 = \mu$ la función acumulativa de fallos es:

$$F(\mu) = 1 - e^{-1} = 0{,}6321$$

Es decir, μ representa el tiempo, medido a partir de $t_0 = 0$, en el que se espera que falle el 63,21 % de la población, cualquiera que sea el valor de **m**, que como hemos visto no influye en el cálculo realizado. Por esta razón, μ se denomina habitualmente "**vida característica**"

El módulo de Weibull (**m**) es una medida de dispersión de la distribución, como más adelante comprobaremos, de manera que, a mayores valores de **m**, mayor uniformidad de la distribución, y por tanto menor dispersión.

La función de Weibull aplicada a los resultados de la medida de la resistencia a la flexión.

La ecuación de Weibull aplicada a la distribución de fallos (roturas) de ensayos de flexión a **N** probetas, puede expresarse como:

$$F(\sigma) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma - \sigma_L}{\sigma_M}\right)^m\right] \quad \text{(ec.6)}$$

donde:

F(σ) : función de distribución de probabilidad de rotura de una probeta sometida a un esfuerzo σ (Kg/cm^2).

$\boldsymbol{\sigma_M}$: resistencia a la flexión característica de la muestra. Cabe esperar que si aplicamos un esfuerzo σ_M, romperán el 63,21 % de las probetas.

$\boldsymbol{\sigma_L}$: resistencia mínima (Kg/cm^2). Representa la tensión por debajo de la cual no hay rotura. Si $\sigma < \sigma_L$, entonces $F(\sigma) = 0$.

m : módulo de Weibull de la distribución.

La función de densidad de probabilidad de rotura, $f(\sigma)$, es:

$$f(\sigma) = \frac{dF(\sigma)}{d\sigma} \quad \text{(ec.7)}$$

y por tanto:

$$f(\sigma) = \frac{m}{\sigma_M} \cdot \left(\frac{\sigma - \sigma_L}{\sigma_M}\right)^{m-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{\sigma - \sigma_L}{\sigma_M}\right)^m\right] \quad \text{(ec.8)}$$

Si se considera $\sigma_L=0$, se asume que las probetas pueden romperse a partir de cualquier presión aplicada.

Para el cálculo de los parámetros **m** y $\boldsymbol{\sigma_M}$, los valores de resistencia a la flexión obtenidos al ensayar las **N** probetas se ordenan de forma creciente ($\sigma i<\sigma i+1$) y se asigna a cada i – ésimo valor, la probabilidad de rotura:

$$F(\sigma_i) = \frac{i - 0{,}5}{N} \quad \text{(ec.9)}$$

según se muestra en la siguiente tabla en la que se disponen los datos de resistencia a la flexión ordenados en secuencia creciente y su probabilidad de rotura.

i	σ_i	$F(\sigma_i)$
1	σ_1	$F(\sigma_1)$
2	σ_2	$F(\sigma_2)$
3	σ_3	$F(\sigma_3)$
…..	…..	…..
N-1	σ_{N-1}	$F(\sigma_{N-1})$
N	σ_N	$F(\sigma_N)$

Los parámetros **m** y $\boldsymbol{\sigma_M}$, pueden calcularse de forma gráfica o mediante ajuste por mínimos cuadrados, para lo que la ec. 6 se expresa como:

$$\frac{1}{1-F(\sigma)} = \exp\left(\frac{\sigma}{\sigma_M}\right)^m \qquad \text{(ec.10)}$$

Asumiendo que σ_L=0 como se ha comentado. Esta ecuación puede linealizarse tomando dos veces logaritmos:

$$\ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-F(\sigma)}\right)\right] = m \cdot \ln\sigma - m \cdot \ln\sigma_M \qquad \text{(ec.11)}$$

Si los defectos se distribuyen de manera aleatoria en todo el material, se obtendrá un buen ajuste a una recta. Si existen dos tipos de defectos que controlen la resistencia, el ajuste de ln ln (1/1-F(σ)) frente a lnσ se hará mejor a dos rectas, es decir se dará una distribución de la probabilidad de fallos de tipo bimodal.

El módulo de Weibull (**m**) es la pendiente de la recta que describe la ec. 11, y la resistencia característica (**σ_M**) es función de la intersección en el eje de ordenadas de esta recta. Por lo tanto, **m** y **σ_M** pueden calcularse realizando el ajuste por mínimos cuadrados a la ecuación de una recta de las variables dependiente - ln[ln(1/(1-F(σ_2)))] – e independiente –ln σ_i – (columnas 4 y 5 de la siguiente tabla).

i	σ_i	F(σ_i)	ln[ln(1/(1-F(σ_i)))]	ln σ_i
1	σ_1	F(σ_1)	ln[ln(1/(1-F(σ_1)))]	ln σ_1
2	σ_2	F(σ_2)	ln[ln(1/(1-F(σ_2)))]	ln σ_2
3	σ_3	F(σ_3)	ln[ln(1/(1-F(σ_3)))]	ln σ_3
…..	…..	…..	…….	……
N-1	σ_{N-1}	F(σ_{N-1})	ln[ln(1/(1-F(σ_{N-1})))]	ln σ_{N-1}
N	σ_N	F(σ_N)	ln[ln(1/(1-F(σ_N)))]	ln σ_N

Ejemplo.

En la columna 2 de la siguiente tabla, se muestran ordenados de forma creciente, los resultados experimentales de las medidas de resistencia a la flexión de probetas de gres rojo prensadas a una presión específica de 250 Kg/cm^2. La tabla se expande con los parámetros indicados en la tabla anterior, calculados a partir de la ec. 6 (columna 3) y términos de la ec.11.

i	σ_i	F(σ_i)	ln[ln(1/(1-F(σ_i)))]	ln σ_i
1	**21,13**	0,0179	-4,0164	3,0508
2	**21,80**	0,0536	-2,8993	3,0820
3	**23,29**	0,0893	-2,3695	3,1481
4	**23,56**	0,1250	-2,0134	3,1598
5	**23,90**	0,1607	-1,7418	3,1739
6	**24,14**	0,1964	-1,5201	3,1842
7	**24,68**	0,2321	-1,3312	3,2060
8	**24,84**	0,2679	-1,1655	3,2127
9	**24,85**	0,3036	-1,0167	3,2130
10	**25,82**	0,3393	-0,8808	3,2512
11	**25,82**	0,3750	-0,7550	3,2515
12	**25,90**	0,4107	-0,6371	3,2543
13	**25,96**	0,4464	-0,5253	3,2569
14	**26,42**	0,4821	-0,4185	3,2744
15	**26,58**	0,5179	-0,3154	3,2805
16	**26,73**	0,5536	-0,2151	3,2862
17	**26,81**	0,5893	-0,1167	3,2889
18	**26,93**	0,6250	-0,0194	3,2933
19	**27,03**	0,6607	0,0778	3,2970
20	**27,07**	0,6964	0,1757	3,2987
21	**27,17**	0,7321	0,2756	3,3021
22	**27,41**	0,7679	0,3787	3,3110
23	**27,54**	0,8036	0,4870	3,3158
24	**27,77**	0,8393	0,6033	3,3240
25	**27,85**	0,8750	0,7321	3,3271
26	**27,95**	0,9107	0,8821	3,3305
27	**28,08**	0,9464	1,0739	3,3351
28	**30,41**	0,9821	1,3926	3,4149

Los datos experimentales se ajustan bien a una recta (figura 1) en escala doble logarítmica, por lo que se puede considerar que la rotura es causada por una sola familia de defectos. La ecuación de la recta obtenida tras el ajuste por mínimos cuadrados es:

$$\ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-F(\sigma)}\right)\right]=15{,}378\cdot\ln\sigma-50{,}613 \qquad r^2=0{,}9756$$

El módulo de Weibull es la pendiente de esta recta, es decir:

m =15,378

La **resistencia característica** (σ_M) se calcula a partir de la ordenada en el origen de la recta:

$$-50{,}613=-15{,}378\cdot\ln\sigma_M$$
$$\sigma_M=26{,}878 \ \text{Kg/cm}^2$$

Otros datos de la serie de ensayos son:

Densidad aparente media (en seco):	2,014 g/cc
Resistencia mecánica media	25,984 Kg/cm^2
Desviación estándar de los datos de RM	2,034 Kg/cm^2
Variabilidad	0,078

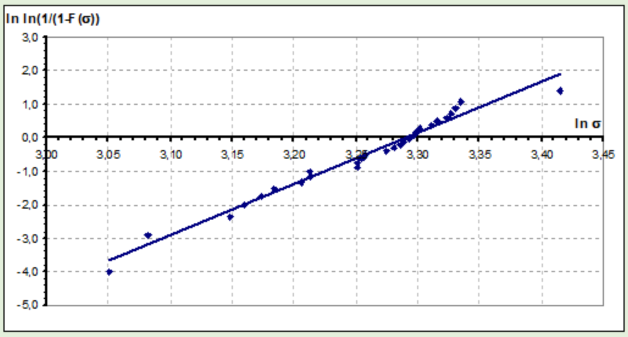

Figura 1 Gráfico de Weibull. Pasta de gres rojo (ρ_{as}=2,014 g/cc).
Fuente: elaboración propia.

Módulo de Weibull y variabilidad.

El módulo de Weibull está relacionado con la dispersión de la tasa de fallos, es decir con la variabilidad de los valores de la resistencia mecánica obtenidos en los ensayos, de manera que a un mayor valor del módulo de Weibull se tiene una menor dispersión. En la figura 2, se muestran las distintas formas de la ecuación de distribución de probabilidad de rotura, F(σ), para σ_L = 0, σ_M = 26,878 Kg/cm^2 y distintos valores del módulo de Weibull. El punto de intersección de todas las curvas es el correspondiente a σ_M, que como hemos dicho es independiente de m, y en el que F(σ_M)=0,6321. En la figura 3 se muestran las formas de la distribución de densidad de probabilidad de rotura, f(σ), para distintos valores del módulo de Weibull.

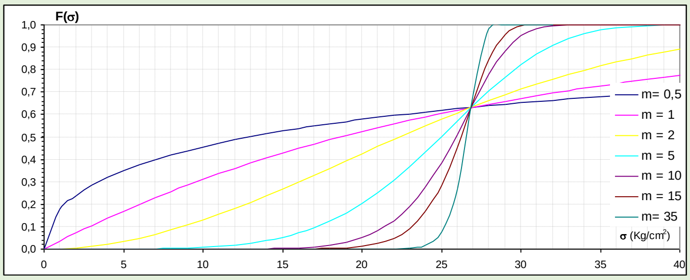

Figura 2. Función de distribución de la probabilidad de rotura de probetas crudas y secas a diferentes módulos de Weibull para una pasta de gres rojo (ρ_{as}=2,014 g/cc).
Fuente: elaboración propia.

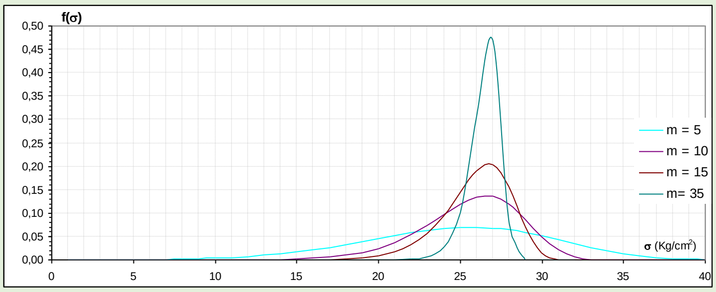

Figura 3. Función de densidad de probabilidad de rotura de probetas crudas y secas a diferentes módulos de Weibull para una pasta de gres rojo (ρ_{as}=2,014 g/cc).
Fuente: elaboración propia.

Por otra parte, es posible relacionar la variabilidad (desviación estándar/media) de los resultados de resistencia a la flexión con el módulo de Weibull: los valores de **m** y de la variabilidad (**v**), obtenidos para 4 series de unas 30 probetas de gres rojo prensadas a diferentes presiones y a la misma humedad y granulometría, se representan en la siguiente tabla. Como se observa en la figura 4 guardan una buena correlación.

ρ_{as} (g/cc)	σ (Kg/cm^2)	v	m
1,943	19,365	0,044	27,251
2,002	24,948	0,059	20,274
2,014	26,878	0,078	15,378
2,062	31,474	0,071	17,039

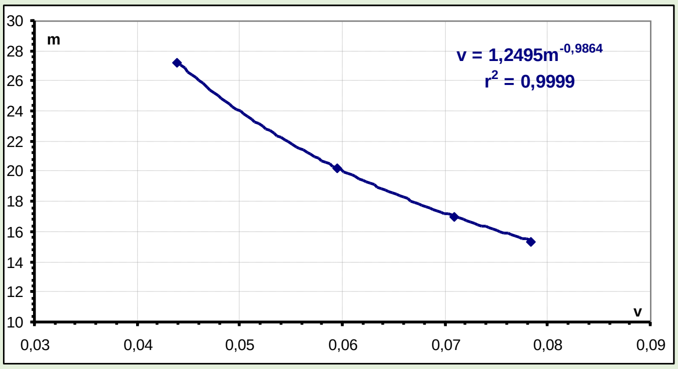

Figura 4 Relación entre variabilidad y módulo de Weibull. Pasta de gres rojo.
Fuente: elaboración propia.

Bibliografía

(1) PASTOR, J.Y. “*Fractura de materiales cerámicos estructurales avanzados*”. Facultad Ciencias Físicas. Dpto. Física de Materiales. U. Complutense, Madrid. Tesis doctoral. (1993).

(2) AMORÓS, J.L. et al. “*Propiedades mecánicas de los soportes cerámicos crudos*”. En Qualicer 2000. VI Congreso Mundial de la Calidad del Azulejo y del Pavimento Cerámico. Castellón: Cámara de Comercio, Industria y Navegación. P.GI 59-75. (2000).

(3) WEIBULL, W. “*A statistical function of wide applicability*”. J.Appl.Mech., 18, 293-297. (1951).

(4) TAMBORERO DEL PINO, J.L. “Fiabilidad: la distribución de Weibull”. Nota Técnica de Prevención (NTP) 331. Instituto Nacional de Seguridad e Higiene en el Trabajo. Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales. [consulta 29/10/2024]. Disponible en http://www.insht.es/InshtWeb/Contenidos/Documentacion/FichasTecnicas/NTP/Ficheros/301a400/ntp_331.pdf